


# הסתברות

משפט הגבול המרכזי והקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית



## ממוצע המדגם


- נתון מדגם מהתפלגות כלשהי עם תוחלת μ וסטיית תקן σ
- המדגם הוא למעשה סדרה של משתנים מקריים מהתפלגות זו, כאשר המשתנים המקריים הם **בלתי תלויים**
- נאמר כי $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם "משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ וסטיית תקן σ"
- נסמן את ממוצע המדגם ב- $\bar{X}_n$ :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$E(\bar{X}_n) = \mu \qquad V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad SD(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## משפט הגבול המרכזי

נתונים $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ וסטיית תקן σ.

אם המדגם **"מספיק גדול"** אז

ההתפלגות של $\bar{X}_n$ היא **בקירוב** התפלגות נורמלית עם תוחלת μ וסטיית תקן $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

שאלה: מה זה מספיק גדול?



## דוגמה: קזינו

בהטלת קובייה הוגנת, תוחלת התוצאה היא 3.5 והשונות היא 2.916 (סטיית התקן היא 1.708)

בית קזינו מציע לכם את המשחק הבא: שלמו 4 דולר והטילו את הקובייה. אתם זוכים בסכום השווה לתוצאת ההטלה.

אם תחליטו לשחק במשחק 100 פעמים, מה הסיכוי כי תצאו ברווח?

כדי להרוויח משהו: אתם צריכים שממוצע ההטלות שלכם יהיה גדול מ-4.

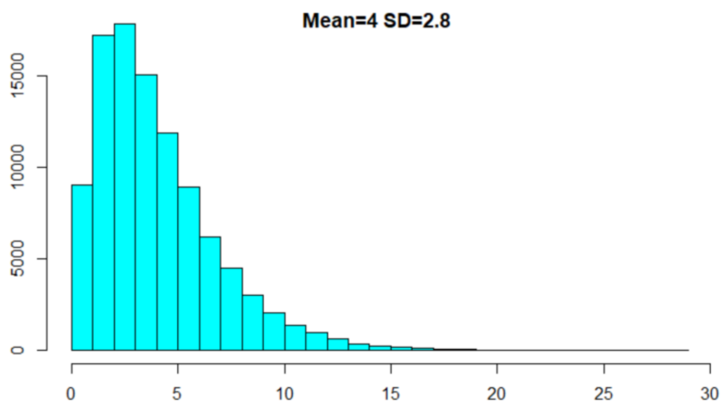
התוחלת של ממוצע ההטלות היא 3.5, וסטיית התקן היא $1.708/\sqrt{100} = 0.171$

$$P(\bar{X}_n > 4) = P(\bar{X}_n - 3.5 > 4 - 3.5) = P\left(\frac{\bar{X}_n - 3.5}{0.171} > \frac{4 - 3.5}{0.171}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_n - 3.5}{0.171} > 2.928\right) = P(Z > 2.928) = 0.0014$$

## דוגמה: תכנון בית חולים

נתונה התפלגות משך זמן האשפוז של חולים בבית חולים מסויים. אם משך האשפוז הממוצע של החולים המאושפזים יעלה על 4.5 ימים, לבית החולים לא יהיו משאבים לטפל בכל החולים. רוצים להבטיח כי ההסתברות שבית החולים לא יקרוס תהיה 99.5% לכל הפחות. כמה מיטות צריכות להיות בבית החולים?






## פתרון

פתרון: נסמן את מספר המיטות ב-n. תוחלת משך האשפוז הממוצע היא 4 ימים, וסטיית התקן היא $2.8/\sqrt{n}$

$$P(\bar{X}_n < 4.5) = P\left(\frac{\bar{X}_n - 4}{2.8/\sqrt{n}} < \frac{4.5-4}{2.8/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{4.5-4}{2.8/\sqrt{n}}\right) = 0.995$$

$$\frac{4.5-4}{2.8/\sqrt{n}} = 2.58$$

$$n = \left(\frac{2.58}{4.5-4} \cdot 2.8\right)^2 = 208.74 \approx 209$$

## דוגמה: החלמה מקורונה

ההסתברות כי חולה קורונה ברמה לא חמורה המאושפז בבית חולים מסויים יחלים היא 0.8. בבית החולים יש 20 חולים. מה ההסתברות כי לפחות 18 חולים יחלימו?

אם נגדיר החלמה של חולה כהצלחה, אז יש לנו כאן 20 ניסויים בלתי תלויים עם הסתברות 0.8 להצלחה. סך כל מספר המחלימים X הוא משתנה מקרי בינומי עם n=20 ו-p=0.8.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20} \quad E(X_1) = 0.8 \quad SD(X_1) = \sqrt{0.8 \cdot 0.2} = 0.4$$

$$\frac{X}{20} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}}{20} \quad E\left(\frac{X}{20}\right) = 0.8 \;\; SD\left(\frac{X}{20}\right) = \frac{0.4}{\sqrt{20}} = 0.09$$

$$P(X \geq 18) = P\left(\frac{X}{20} \geq 0.9\right) = P\left(\frac{\frac{X}{20} - 0.8}{0.09} \geq \frac{0.9 - 0.8}{0.09}\right) = P(Z \geq 1.11) = 0.867$$



## דוגמה: החלמה מקורונה

- מה ההסתברות כי בדיוק 18 חולים יחלימו?

$$P(X = 18) = P\left(\frac{X}{20} = 0.9\right) = P\left(\frac{\frac{X}{20} - 0.8}{0.09} = \frac{0.9 - 0.8}{0.09}\right) = P(Z = 1.11) = 0\,???$$


## תיקון רציפות

$$P(X=18) \quad = P(17.5 < X < 18.5) \quad = P\left(0.875 < \frac{X}{20} < 0.925\right)$$

$$= P\left(\frac{0.875-0.8}{0.09} < \frac{\frac{X}{20}-0.8}{0.09} < \frac{0.925-0.8}{0.09}\right)$$

$$= P(0.83 < Z < 1.39) = 0.121$$

בחישוב ישיר התשובה היא 0.137, כלומר הקירוב לא טוב. הקירוב סביר כאשר np(1-p)>9. במקרה שלנו ערך זה שווה רק ל-2.88