



הסתברות

משתנים מקריים, תוחלת, שונות

1

משתנים מקריים – חברת הפרוייקט



דוגמה: חברת הפרוייקט

- אם פרוייקט A יצליח הרווח לחברה יהיה 30 מיליון ₪, ואם ייכשל יירשם הפסד של 10 מיליון ₪
- אם פרוייקט B יצליח הרווח לחברה יהיה 70 מיליון ₪, ואם ייכשל יירשם הפסד של 100 מיליון ₪

נגדיר שלושה משתנים מקריים

- X = השינוי במאזן החברה לאחר סיום פרוייקט A
- Y = השינוי במאזן החברה לאחר סיום פרוייקט B
- Z = השינוי במאזן החברה לאחר שני הפרוייקטים

שימו לב כי $Z=X+Y$

2

משתנים מקריים – חברת הפרוייקט



הסתברות	ערך Z
$P(Z=100)=0.65$	100
$P(Z=-70)=0.1$	-70
$P(Z=60)=0.15$	60
$P(Z=-110)=0.1$	-110

הסתברות	ערך X
$P(X=30)=0.75$	30
$P(X=-10)=0.25$	-10

הסתברות	ערך Y
$P(Y=70)=0.8$	70
$P(Y=-10)=0.2$	-100

	פרוייקט B נכשל	פרוייקט B מצליח	
0.75 +30	0.10 -70	0.65 +100	פרוייקט A מצליח
0.25 -10	0.10 -110	0.15 +60	פרוייקט A נכשל
	0.20 -100	0.80 +70	

3

תוחלת: חברת הפרוייקט



איך לשקלל את הרווחים/הפסדים הצפויים?

תזכורת: בעולם מושלם החברה הייתה יכולה לבצע את פרוייקט A 100 פעמים

- ב-75 פעמים הפרוייקט היה מצליח ומשיג רווח של 30 מיליון ₪
- ב-25 פעמים הפרוייקט היה נכשל ומביא להפסד של 10 מיליון ₪

נחשב את ממוצע הרווחים/הפסדים הצפויים: $\frac{30 + 30 + \dots + 30 + (-10) + (-10) + \dots + (-10)}{100}$

$$= \frac{75 \cdot 30 + 25 \cdot (-10)}{100}$$

$$= 0.75 \cdot 30 + 0.25 \cdot (-10) = 20$$

קיבלנו למעשה ממוצע משוקלל של ערכי המשתנה המקרי על פי ההסתברות של כל ערך

4

תוחלת: חברת הפרוייקט



הגדרה: התוחלת של משתנה מקרי X שווה לסכום מכפלת ערכי המשתנה בהסתברויות הערכים, בהתאמה.

התוחלת היא האנלוגיה ההסתברותית למוצע, והיא מדד מיקום מרכזי של התפלגות המשתנה המקרי

$$E(X) = 0.75 \cdot 30 + 0.25 \cdot (-10) = 20$$

$$E(Y) = 0.8 \cdot 70 + 0.2 \cdot (-100) = 36$$

$$E(Z) = 0.65 \cdot 100 + 0.1 \cdot (-70) + 0.15 \cdot 60 + 0.1 \cdot (-110) = 56$$

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{שימו לב כי קיבלנו}$$

5

תכונות התוחלת



▪ אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים אז $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

▪ אם X הוא משתנה מקרי, a ו- b מספרים כלשהם, אז $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

דוגמה:

- התשלום עבור פרוייקט A יהיה בדולרים. שער החליפין: 1 ש"ח = 0.3 דולר
- כן צפוי בונוס של 100000 דולר אם הפרוייקט יסתיים חצי שנה לפני המועד, וזה יקרה בוודאות מוחלטת
- W = השינוי במאזן החברה לאחר סיום פרוייקט A , בדולרים

$$\begin{aligned} E(W) &= E(0.3 \cdot X + 0.1) = 0.3 \cdot E(X) + 0.1 \\ &= 0.3 \cdot 36 + 0.1 = 10.9 \end{aligned}$$

6



כפי שבשלב הסטטיסטיקה התיאורית הגדרנו את השונות כמדד פיזור סביב הממוצע, כך נגדיר את השונות של משתנה מקרי כמדד פיזור סביב התוחלת

הגדרה: X הוא משתנה מקרי, ונסמן את התוחלת $E(X)$ באות היוונית μ .
השונות וסטיית התקן של X מוגדרות כ-

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$



$$E(X^2) = 0.75 \cdot 900 + 0.25 \cdot 100 = 700$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 700 - 20^2 = 300$$

$$SD(X) = \sqrt{300} = 26.46$$

הסתברות	ערך X
$P(X=30)=0.75$	30
$P(X=-10)=0.25$	-10

	ערך X^2
$P(X^2=900)=0.75$	900
$P(X^2=100)=0.25$	100



$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{COV}(X, Y)$$

$$\text{COV}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

- אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים בלתי תלויים אז $\text{COV}(X, Y) = 0$
- ההיפך אינו נכון



X ו- Y הם ההכנסות הצפויות מפרוייקטים A ו-B בהתאמה. Z שווה ל- $X+Y$

$$E(X) = 20$$

$$V(X) = 300$$

$$E(Y) = 36$$

$$V(Y) = 4624$$

$$E(X) + E(Y) = 56$$

$$V(X) + V(Y) = 4924$$

הסתברות	ערך Z
$P(Z=100)=0.65$	100
$P(Z=-70)=0.1$	-70
$P(Z=60)=0.15$	60
$P(Z=-110)=0.1$	-110

$$E(Z^2) = 0.65 \cdot 100^2 + 0.1 \cdot (-70)^2 + 0.15 \cdot 60^2 + 0.1 \cdot (-110)^2 = 8740$$

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 8740 - 56^2 = 5604$$



$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$$

אם X הוא משתנה מקרי, a ו- b מספרים כלשהם, אז

$$SD(a \cdot X + b) = |a| \cdot SD(X)$$

דוגמה:

הסתברות	W	X
0.85	3	5
0.15	-1.5	-10

בפרוייקט C, סיכויי ההצלחה הם 80%. במקרה של הצלחה, הרווח הצפוי לחברה הוא 5 מיליון ₪ ובמקרה של כשילון צפוי הפסד של 10 מיליון ₪. כמו כן צפוי בונס של 1.5 מיליון דולר. נגדיר כאן את X כשינוי במאזן החברה בשקלים לאחר סיום הפרוייקט, ואת W כשינוי במאזן החברה בדולרים.

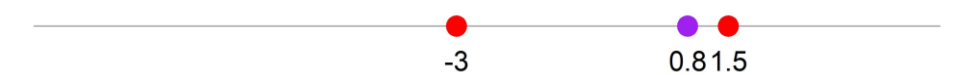
לכן $W = 0.3 \cdot X + 1.5$



$$0.3 \cdot X + 1.5$$



$$0.3 \cdot X$$



$$X$$

