אמידה – תרגיל

1. נתון משתנה מקרי X המוגדר על ידי פרמטר θ כאשר $0 \leq \theta \leq \frac{1}{6}$.
פונקציית ההסתברות של X היא:

k	$P(X=k)$
1	0.5
2	θ
3	2θ
4	$0.5-3\theta$

א. בהינתן מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ (משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות) מהתפלגות זו, מצאו אמד מומנטים עבור θ.
ב. האם האמד שמצאתם בסעיף א הוא חסר הטיה? נמקו
ג. במדגם בגודל 6 מההתפלגות התקבלו התוצאות הבאות: 2,3,4,1,2,1.
חשבו אמדן ל-θ על סמך מדגם זה.

2. התפלגות גיאומטרית מתארת את מספר הניסויים שמתבצעים עד להצלחה ראשונה, כאשר הניסויים הם ניסויי ברנולי. הערכים האפשריים שמשתנה מקרי זה יכול לקבל הם כל המספרים השלמים מ-0 והלאה. הפרמטר של ההתפלגות הוא p, ופונקציית ההסתברות היא $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$
לדוגמה: אם p=0.2 ו-k=3 אז $P(X=3)=0.2\cdot 0.8^2=0.128$
ידוע כי ערכו של p הוא אחד משלושת הערכים הבאים: 0.2, 0.5 או 0.8.
במדגם בגודל 3 מהתפלגות זו התקבלו הערכים הבאים: 0, 2, ו-4
חשבו את אמדן הנראות המירבית עבור p.

הדרכה: בגלל שהמשתנים של ערכי המדגם הם משתנים מקריים בלתי תלויים, אז ההסתברות כי הערכים שיעלו במדגם הם *a, b, c* היא $P(X=a)\cdot P(X=b)\cdot P(X=c)$

3. במדגם בגודל *n=5* הוצא האמד הבא עבור התוחלת μ של משתנה מקרי *X*:

$$\hat{\mu}=\frac{2X_1+X_2+X_4+X_5}{5}$$

א. הראו כי זהו אמד חסר הטיה עבור μ.
ב. הסבירו מדוע אמד זה הינו אמד פחות טוב עבור μ מאשר ממוצע המדגם
i. באופן אינטואיטיבי
ii. על ידי חישוב *MSE*

4. שני שמאים נשלחו למדוד את שטחו של מגרש בצורת ריבוע. כל אחד מהם מדד את אורכו של צלע הריבוע באופן בלתי תלוי ממדידת רעהו, ותוצאות המדידות היו:
$X_1 = 99,\ X_2 = 102$ מטר. ההתפלגות של שתי המדידות זהה, כאשר תוחלת כל מדידה היא $\mu = 100$ וסטיית התקן היא $\sigma = 1$. הוצעו שלושה אמדים עבור שטח המגרש $S = \mu^2$:

$$\hat{S}_1 = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 \qquad \hat{S}_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2} \qquad \hat{S}_3 = X_1 X_2$$

א. חשבו את ההטיה של כל אחד מבין שלושת האמדים. איזה מהם הוא חסר הטיה, אם בכלל?
ב. איזה אמד תעדיפו מבין השלושה?

הדרכה:
1) השתמשו בזהות האלגברית $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) אם X ו-Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים אז $E(XY) = E(X)E(Y)$
3) זכרו כי $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ כלומר $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$