


פתרון תרגיל באמידה

שאלה מספר 1


. נתון משתנה מקרי X המוגדר על ידי פרמטר θ כאשר $0 \le \theta \le \frac{1}{6}$.

פונקציית ההסתברות של X היא:

$P(X=k)$	k
0.5	1
θ	2
2θ	3
$0.5-3\theta$	4

שאלה 1 – סעיף א

א. בהינתן מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ (משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות) מהתפלגות זו, מצאו אמד מומנטים עבור θ.

אמד מומנטים מבוסס על כך שהאמד לתוחלת הוא ממוצע המדגם, כלומר $\hat{\mu} = \bar{X}_n$. נחשב את

התוחלת של המשתנה X:
$$\mu = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot \theta + 3 \cdot 2\theta + 4 \cdot (0.5 - 3\theta) = 2.5 - 4\theta$$

לכן:
$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = 2.5 - 4\hat{\theta}$$

ומכאן:
$$\hat{\theta} = \frac{2.5 - \bar{X}_n}{4}$$

שאלה 1 – סעיף ב

ב. האם האמד שמצאתם בסעיף א הוא חסר הטיה? נמקו

נחשב את התוחלת של האמד שמצאנו

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = E\left(\frac{2.5 - \bar{X}_n}{4}\right) = \frac{2.5 - E(\bar{X}_n)}{4} = \frac{2.5 - \mu}{4}$$

$$= \frac{2.5 - (2.5 - 4\theta)}{4} = \theta$$

שאלה 1 – סעיף ג

ג. במדגם בגודל 6 מההתפלגות התקבלו התוצאות הבאות: 2,3,4,1,2,1.
חשבו אמדן ל-θ על סמך מדגם זה.

נחשב את ממוצע המדגם:

$$\bar{X}_n = \frac{2+3+4++2+1}{6} = 2.167$$

נציב את ערך הממוצע באמד ונקבל את האמדן:

$$\hat{\theta} = \frac{2.5-2.167}{4} = 0.083$$

שאלה 2

2. התפלגות גיאומטרית מתארת את מספר הניסויים שמתבצעים עד להצלחה ראשונה, כאשר הניסויים הם ניסויי ברנולי. הערכים האפשריים שמשתנה מקרי זה יכול לקבל הם כל המספרים השלמים הגדולים מ-0. הפרמטר של ההתפלגות הוא p, ופונקציית ההסתברות היא $P(X=k)=p(1-p)^k$
לדוגמה: אם $p=0.2$ ו-$k=3$ אז $P(X=3)=0.2\cdot 0.8^3=0.1024$
ידוע כי ערכו של p הוא אחד משלושת הערכים הבאים: 0.2, 0.5 או 0.8.
במדגם בגודל 3 מהתפלגות זו התקבלו הערכים הבאים: 0, 2, ו-4
חשבו את אמדן הנראות המירבית עבור p.

הדרכה: בגלל שהמשתנים של ערכי המדגם הם משתנים מקריים בלתי תלויים, אז ההסתברות כי הערכים שיעלו במדגם הם a, b, c היא $P(X=a)\cdot P(X=b)\cdot P(X=c)$

שאלה 2

נחשב את ההסתברות כי נקבל את המדגם שקיבלנו:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 2, X_3 = 4) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 = 4)$$

$$= p \cdot (1-p)^0 \cdot p \cdot (1-p)^2 \cdot p \cdot (1-p)^4 = p^3 \cdot (1-p)^6$$

נחשב הסתברות זו עבור שלושת הערכים האפשריים של p:

עבור $p = 0.2$: $\boxed{0.2^3 \cdot (1-0.2)^6 = 0.00209}$

עבור $p = 0.5$: $0.5^3 \cdot (1-0.5)^6 = 0.00195$

עבור $p = 0.8$: $0.8^3 \cdot (1-0.8)^6 = 0.00003$

אמדן הנראות המירבית הוא הערך עבור ההסתברות לקבלת המדגם הזה היא הגבוהה ביותר ולכן $\hat{p} = 0.2$

שאלה 3

3. במדגם בגודל $n=5$ הוצא האמד הבא עבור התוחלת μ של משתנה מקרי X: $\hat{\mu} = \frac{2X_1 + X_2 + X_4 + X_5}{5}$

א. הראו כי זהו אמד חסר הטיה עבור μ.

נחשב את התוחלת של $\hat{\mu}$

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{2X_1 + X_2 + X_4 + X_5}{5}\right)$$

$$= \frac{2E(X_1) + E(X_2) + E(X_4) + E(X_5)}{5}$$

$$= \frac{2\mu + \mu + \mu + \mu}{5} = \frac{5\mu}{5} = \mu$$

שאלה 3 – סעיף ב

ב. הסבירו מדוע אמד זה הינו אמד פחות טוב עבור μ מאשר ממוצע המדגם

i. באופן אינטואיטיבי *ii*. על ידי חישוב *MSE*

נחשב את ה-*MSE* של $\hat{\mu}$

$$MSE(\hat{\mu}) = V\left(\frac{2X_1 + X_2 + X_4 + X_5}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{25} \cdot [V(2X_1) + V(X_2) + V(X_4) + V(X_5) = \frac{1}{25} \cdot [4V(X_1) + V(X_2) + V(X_4) + V(X_5)]$$

$$= \frac{1}{25} \cdot [4\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2] = \frac{7\sigma^2}{25}$$

לעומת זאת

$$MSE(\bar{X}_5) = \frac{\sigma^2}{5} = \frac{5\sigma^2}{25}$$

שאלה 4

4. שני שמאים נשלחו למדוד את שטחו של מגרש בצורת ריבוע. כל אחד מהם מדד את אורכו של צלע הריבוע באופן בלתי תלוי ממדידת רעהו, ותוצאות המדידות היו: $X_1 = 99,\ X_2 = 102$ מטר. ההתפלגות של שתי המדידות זהה, כאשר תוחלת כל מדידה היא $\mu = 100$ וסטיית התקן היא $\sigma = 1$. הוצעו שלושה אמדים עבור שטח המגרש $S = \mu^2$:

$$\hat{S}_1 = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 \qquad \hat{S}_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2} \qquad \hat{S}_3 = X_1X_2$$

שאלה 4 – סעיף א

א. חשבו את ההטיה של כל אחד מבין שלושת האמדים. איזה מהם הוא חסר הטיה, אם בכלל?

נסמן את המשתנה המקרי שהוא ערך המדידה ב-X

ראשית נחשב את התוחלת של X^2 :

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

ולכן

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = 101$$

חישוב זה יעזור לנו לחשב את התוחלות של האמדים

שאלה 4 – סעיף א – המשך

באמד הראשון נפתח את הסוגריים ונקבל:

$$E(\hat{S}_1) = E\left[\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2\right] = E\left(\frac{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2}{4}\right) = \frac{E(X_1^2) + 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)}{4}$$

אנחנו צריכים עכשיו לחשב את $E(X_1X_2)$ כלומר את התוחלת של האמד השלישי שהוצע

וגם את $E(X_1^2)$ שמייד נראה כי נצטרך את הערך הזה לחישוב התוחלת של האמד השני שהוצע

שאלה 4 – סעיף א – המשך

לכן נעבור אל האמד השלישי שהוצע:

$$E(\hat{S}_3) = E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = \mu \cdot \mu = \mu^2$$

כלומר: $\hat{S}_3$ הוא אמד חסר הטיה עבור S

שאלה 4 – סעיף א – המשך

נמשיך עם האמד השני:

$$E(\hat{S}_2) = E\left(\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}\right) = \frac{E(X_1^2) + E(X_2^2)}{2}$$

$$= \frac{(\sigma^2 + \mu^2) + (\sigma^2 + \mu^2)}{2} = \sigma^2 + \mu^2$$

ולכן $\hat{S}_2$ אינו אמד חסר הטיה עבור S . ההטיה שווה ל-σ^2 כלומר ל-1

שאלה 4 – סעיף א – המשך

ובעת הגענו לאמד הראשון:

$$E(\hat{S}_1) = E\left[\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2\right] = E\left(\frac{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2}{4}\right)$$

$$= \frac{E(X_1^2) + 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)}{4} = \frac{(\sigma^2 + \mu^2) + 2\mu^2 + (\sigma^2 + \mu^2)}{4}$$

$$= \frac{4\mu^2 + 2\sigma^2}{4} = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{2}$$

ולכן גם $\hat{S}_1$ אינו אמד חסר הטיה עבור S . ההטיה שווה ל- $\frac{\sigma^2}{2}$ כלומר ל-0.5.

שאלה 4 – סעיף ב – איזה אמד תעדיפו?

1. תיאורטית יש לבחור באמד עם ה-MSE הנמוך ביותר, אבל מעשית חישוב ה-MSE לא פשוט
2. אמנם יש אמד חסר הטיה, אבל ההטיה של שני האמדים האחרים זניחה
3. לשני האמדים הראשונים יש משמעות גיאומטרית ברורה
4. שלושת האמדים נותנים ערכי אמדנים דומים

$$\hat{S}_1 = \left(\frac{99 + 102}{2}\right)^2 = 10100.25 \qquad \hat{S}_2 = \frac{99^2 + 102^2}{2} = 10102.5 \qquad \hat{S}_3 = 99 \cdot 102 = 10098$$